Ein didaktisch orientiertes Vektorkonzept

Günther Malle, Universität Wien

Die Vektorrechnung in der Schule zerfällt in einen algebraischen und einen geometrischen Teil. Da der algebraische Teil aus didaktischer Sicht relativ unproblematisch ist, soll dieser nur kurz gestreift werden. Der geometrische Teil hingegen wirft schwierige didaktische Fragen auf und soll ausführlicher behandelt werden.

1. Algebraischer Teil der Vektorrechnung

Das vorrangige Ziel ist hier das Rechnen mit Zahlenpaaren und Zahlentripeln, allgemeiner mit Zahlen-n-Tupeln. Ich beschränke mich hier auf die Zahlenpaare, da für Zahlentripel oder Zahlen-n-Tupel im Großen und Ganzen alles analog läuft.

An Beispielen ist leicht zu zeigen, dass man zur Darstellung mancher Sachverhalte mit einer einzigen reellen Zahl nicht auskommt, sondern dazu zwei reelle Zahlen braucht (z.B. Einnahmen und Ausgaben einer Schülerin, Punkte im Koordinatensystem). Die Menge aller Paare reeller Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^2$ und nennen ihre Elemente in Hinblick auf das spätere Rechnen **Vektoren in** $\mathbb{R}^2$ oder (da wir zunächst keine anderen Vektoren kennen) kurz **Vektoren**.

Für diese Vektoren werden Rechenoperationen (Addition, Vervielfachung) definiert. Dass diese Rechenoperationen koordinatenweise erfolgen, kann an Beispielen gut motiviert werden. Wenn $A = (120/150)$ der Vektor ist, der die Ausgaben von Anna im Urlaub für Flug bzw. Hotel angibt, und $B = (130/170)$ der entsprechende Ausgabenvektor für Berta, dann ist es nahe liegend, für den Ausgabenvektor beider Mädchen zusammen zu schreiben:

$$A + B = (120+130/150+170) = (250/320)$$

Wenn inzwischen alles um 10 % teurer geworden ist, liegt es nahe, für den neuen Ausgabenvektor von Anna zu schreiben:

$$A' = 1{,}1 \cdot A = 1{,}1 \cdot (120/150) = (1{,}1 \cdot 120/1{,}1 \cdot 150) = (132/165)$$

Allgemein definiert man für $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$:

$$(a_1/a_2) + (b_1/b_2) := (a_1 + b_1/a_2 + b_2) \quad \text{und} \quad r \cdot (a_1/a_2) := (r \cdot a_1/r \cdot a_2)$$

Bezüglich dieser Rechenoperationen bilden die Vektoren des $\mathbb{R}^2$ einen reellen Vektorraum. Der Nachweis kann geführt werden, indem man jedes Vektorraumaxiom auf das entsprechende Gesetz in $\mathbb{R}$ zurückführt. Im Unterricht braucht man aber die Vektorraumaxiome gar nicht im Einzelnen zu betrachten (der Begriff des Vektorraumes ist auch im Lehrplan nicht vorgesehen), wenn man sich Folgendes überlegt. Jede Rechnung mit Vektoren kann in zwei gewöhnliche Rechnungen mit reellen Zahlen zerlegt werden, nämlich eine Rechnung mit den ersten Koordinaten und eine mit den zweiten Koordinaten. Man könnte diese beiden Rechnungen getrennt voneinander aufschreiben, einfacher ist es jedoch, sie in Form von Vektoren (Zahlenpaaren) aufzuschreiben. Daraus erkennt man, dass sich die Rechengesetze für reelle Zahlen automatisch auf Vektoren übertragen. Man kann mit Vektoren also analog rechnen wie mit reellen Zahlen und sie als „verallgemeinerte Zahlen“ auffassen.

Dieser Teil der Vektorrechnung – der zunächst gar nichts mit Geometrie zu tun hat – wird in der Schule meist stark vernachlässigt, im Gegensatz zu seiner Bedeutung in der Mathematik und ihren Anwendungen. Er gehört also grundsätzlich gestärkt. Als Aufgaben bieten sich vor allem Aufgaben zum Aufstellen und Interpretieren von Vektorformeln an (eine Fortsetzung entsprechender Tätigkeiten im Eindimensionalen). Aus Platzgründen sei hier als Beispiel nur eine Aufgabe zur Addition und Subtraktion angegeben:

> *Eine Firma verkauft zwei Waren, die sie in zwei Lagern aufbewahrt. Der Vektor A = (235/180) gibt die Stückzahlen der beiden Waren im ersten Lager, der Vektor B = (312/405) die Stückzahlen der beiden Waren im zweiten Lager an. Der Vektor C gebe die Stückzahlen der beiden Waren in beiden Lagern zusammen an.*
> *a) Drücke C durch A und B aus und berechne C.*
> *b) Was gibt der Vektor B – A an?*

Empirische Untersuchungen zeigen, dass dieser algebraische Teil der Vektorrechnung den Schülerinnen und Schülern kaum nennenswerte Probleme bereitet. Wenn wir jedoch Analytische Geometrie betreiben wollen, müssen wir die Vektoren (Zahlenpaare) und deren Rechenoperationen mit der Geometrie der Ebene in Verbindung bringen – und hier fangen die Probleme an.

2. Geometrischer Teil der Vektorrechnung

Das Pfeilklassenmodell

Pfeilklassen bieten eine Möglichkeit, Vektoren auf geometrischer Basis einzuführen. Da dieses Modell aus diversen Schulbüchern sehr bekannt ist, soll es hier nur kurz beschrieben werden. In diesem Modell wird ein Vektor als **Pfeilklasse** aufgefasst, d.h. als eine Menge gleich langer, gleich gerichteter und gleich orientierter Pfeile (siehe Abb. 1). Jeder Pfeil einer solchen Pfeilklasse wird **Repräsentant** der Pfeilklasse genannt. Für diese Pfeilklassen werden Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Vervielfachung) über Repräsentanten definiert, die Addition wie in Abb. 2 und die Vervielfachung wie in Abb. 3.

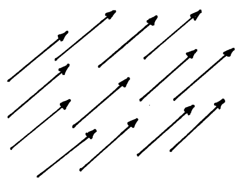


Abb. 1 Vektor als Pfeilklasse

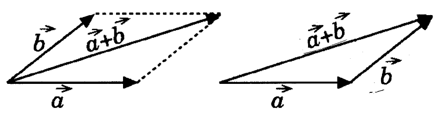


Abb. 2 Addition

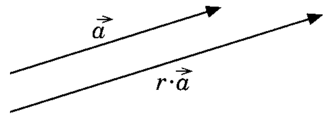


Abb. 3 Vervielfachung (für r > 0)

Dieses Vorgehen hat eine unangenehme Konsequenz: Bei jeder Definition muss die Unabhängigkeit von der Auswahl der Repräsentanten nachgewiesen werden. Betrachten wir etwa die Summe zweier Vektoren (Abb. 2). Wenn man statt der gezeichneten Repräsentanten der beiden Pfeilklassen zwei andere Repräsentanten mit gemeinsamem Anfangspunkt auswählt, muss durch geometrische Argumente nachgewiesen werden, dass sich dieselbe Summenpfeilklasse ergibt.

Man kann zeigen, dass die Pfeilklassen der Ebene (des Raumes) einen reellen Vektorraum bilden. Die Nachweise der Rechengesetze erfolgen geometrisch über Repräsentanten (durch zum Teil aufwändige Überlegungen).

Didaktische Bewertung des Pfeilklassenmodells

Mathematisch betrachtet ist das Pfeilklassenmodell durchaus korrekt. Gegen seine Verwendung im Mathematikunterricht der Schule sprechen aber schwerwiegende didaktische Gründe, von denen im Folgenden einige behandelt werden.

1. Das Pfeilklassenmodell ist **unbrauchbar für die Analytische Geometrie**. Denn in der Analytischen Geometrie denkt man in Punkten und Pfeilen (Bewegungen) und nicht in Pfeilklassen. Betrachten wir etwa folgende Grundaufgabe:

Von einem Parallelogramm ABCD kennt man die Eckpunkte A, B und D. Man ermittle die Koordinaten des Eckpunkts C.

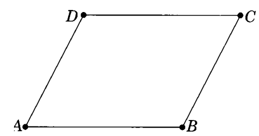


Abb. 4 Was denkt man sich bei der Ermittlung von C?

Jeder denkt hier wohl im Prinzip so: Ich gehe vom Punkt B aus und gehe längs des Pfeiles von B nach C zum (noch unbekannten) Punkt C. Das kann man beispielsweise so anschreiben: $C = B + \overrightarrow{BC}$. Leider kenne ich $\overrightarrow{BC}$ nicht. Aber ich sehe an der Figur: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Weil A und D gegeben sind, kann ich $\overrightarrow{AD}$ berechnen und erhalte $C = B + \overrightarrow{AD}$.

Ich wette: Jeder von uns denkt hier in Punkten und Pfeilen und nicht in Pfeilen allein und schon gar nicht in Pfeilklassen. Oder denkt hier jemand an den zum Pfeil $\overrightarrow{BC}$ parallelen Pfeil, der 100 000 km nach links oben verschoben ist?

2. Das Pfeilklassenmodell ist **unbrauchbar für die Physik**. Praktisch alle in der Physik (zumindest der Schulphysik) vorkommenden Vektoren sind *keine* Pfeilklassen. Die einzige Ausnahme, die mir einfällt, ist die Feldstärke in einem homogenen Feld. Sobald aber das Feld inhomogen ist, trifft das schon nicht mehr zu.

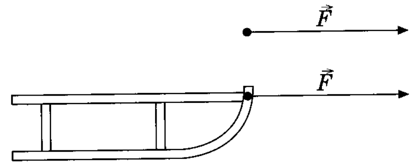


Abb. 5 Wo greift die Zugkraft an?

Betrachten wir als weitere Beispiele Kraftvektoren. Wenn etwa ein Schlitten über eine Eisfläche gezogen wird, kann man die Zugkraft durch den unteren Pfeil in Abb. 5 darstellen, es ergibt aber keinen Sinn, sie durch den oberen Pfeil darzustellen. Oder betrachten wir einen starren Körper, der um einen Punkt drehbar ist (Abb. 6). Wenn wir die beiden eingezeichneten Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ so verschieben, dass sie im Drehpunkt angreifen, dann dreht sich der Körper plötzlich nicht mehr. Viele Kraftvektoren der Physik sind also an ihren Angriffspunkt gebunden oder können bestenfalls in ihrer „Wirkungslinie" verschoben werden. Aber man darf praktisch nie die Kraftpfeile beliebig in der Gegend herum schieben.

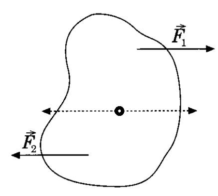


Abb. 6 Kraftpfeile dürfen nicht beliebig verschoben werden

3. Ein Spezifikum des Pfeilklassenmodells besteht darin, dass man zwischen **Klassen und Repräsentanten** unterscheiden muss. Dies erzeugt bei vielen Schülerinnen und Schülern den falschen Eindruck, dass dies eine notwendig Eigenschaft des Vektorbegriffes sei. Dies ist aber nur eine zufällige Eigenschaft des Pfeilklassenmodells und ansonsten überhaupt nicht typisch für Vektoren. In der Definition eines Vektorraumes ist keine Rede von Klasse und

Repräsentant und bei fast allen Vektoren, die in der Mathematik vorkommen, ergibt diese Unterscheidung auch keinen Sinn.

4. Während die algebraische **Einführung der Rechenoperationen** und die **Beweise der Rechengesetze** für Zahlenpaare und Zahlentripel sehr einfach sind, ist dies im Pfeilklassenmodell (wie in allen anderen geometrischen Modellen) nicht der Fall. Die Beweise sind im Pfeilklassenmodell vielfach sehr aufwändig, oft schon dadurch, dass viele Fälle unterschieden werden müssen. Man überlege sich dazu beispielsweise, wie viele Fälle für die Lage der Repräsentanten der drei Pfeilklassen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ man betrachten müsste, um das Assoziativgesetz $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ geometrisch zu beweisen. Für genauere Begründungen stehen auf Schulniveau nicht immer ausreichend viele geometrische Lehrsätze zur Verfügung. Im Gegensatz zur Einführung der Rechenoperationen auf algebraischer Basis bringt die Einführung der Rechenoperationen auf geometrischer Basis auch gewisse Probleme der Namensgebung mit sich. Dass man die koordinatenweise Addition von Zahlenpaaren als Addition bezeichnet, ist ziemlich einsichtig, aber warum wird die Zusammensetzung zweier Pfeile zu einem resultierenden Pfeil durch Aneinanderhängen oder nach der Parallelogrammregel als Addition bezeichnet? Analoges gilt für die Subtraktion und skalare Multiplikation.

5. In einigen deutschen Schulbüchern um 1960-1970 (z.B. KÖHLER/ HÖWELMANN/ KRÄMER 1968) wurde das Pfeilklassenmodell mathematisch sauber behandelt. Bei der Übernahme dieses Modells durch andere Autoren sind jedoch häufig **Verwässerungen** eingetreten. Manchmal werden Vektoren als Pfeilklassen definiert, diese Definition hat aber nur eine Alibifunktion, weil später mit ihr nicht mehr gearbeitet wird.

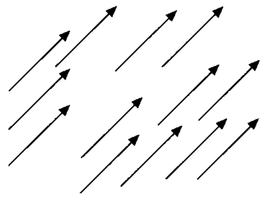
Ein Beispiel aus einem Lehrbuch: Die Autoren definieren zunächst einen Vektor als Pfeilklasse und weisen auf den Unterschied zwischen Vektor und Repräsentant hin. Nur wenige Zeilen später findet sich jedoch eine Konstruktionsbeschreibung, in der Folgendes zu lesen ist:

(1) Zunächst zeichnet man den Vektor $\vec{r}$ von C nach C'.
(2) Dann verschiebt man $\vec{r}$ parallel durch die Punkte A und B.
(3) Die Endpunkte der Vektoren sind in entsprechender Reihenfolge zu verbinden.

Was soll das alles bedeuten? Ad (1): Was soll es heißen, eine Pfeilklasse von einem Punkt nach einem anderen zu zeichnen (sie besteht ja aus unendlich vielen Pfeilen)? Ad (2): Was bedeutet es, eine Pfeilklasse parallel zu verschieben (sie ändert sich ja durch eine Parallelverschiebung nicht)? Ad (3): Was sind die Endpunkte einer Pfeilklasse (sie hat ja keine Endpunkte)? Es ist klar, dass hier nicht mehr von Pfeilklassen, sondern von Einzelpfeilen die Rede ist. Der Vektorbegriff hat in diesem Buch auf einer Strecke von nur wenigen Zeilen eine wundersame Wandlung von einer Pfeilklasse zu einem Einzelpfeil durchgemacht, ohne dass dies näher erläutert wird.

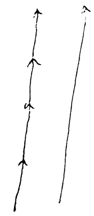
6. Dass diese Widersprüchlichkeiten Schülerinnen und Schülern **Schwierigkeiten** bereiten, liegt auf der Hand. In der Tat haben empirische Untersuchungen gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler enorme Schwierigkeiten mit dem Pfeilklassenmodell haben, die im Wesentlichen auf der Diskrepanz beruhen, dass Vektoren offiziell als Pfeilklassen eingeführt werden, beim praktischen Arbeiten jedoch als Einzelpfeile empfunden werden. Ich zitiere dazu einige Interviewausschnitte aus einer empirischen Untersuchung (siehe MALLE 2005c) an fünfzehnjährigen Schülerinnen und Schülern. (Die Abkürzungen bedeuten: I = Interviewer, A = Alexandra, R = Richard, M = Michaela.)

Interview mit Alexandra:



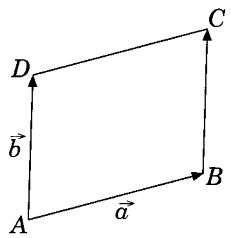
I: Was stellst du dir unter einem Vektor vor?
A: Einen Pfeil in einem Raum.
I: Jemand sagt: „Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile.“ Was sagst du dazu?
A: Stimmt nicht!
I: Warum?
A: Ein Vektor ist etwas Einzelnes. Es gibt natürlich mehrere Vektoren, das sind dann mehrere Pfeile, aber eine Gesamtheit? Das kann ich mir nicht vorstellen.
I: Was ist für dich ein Vektor?
A: Etwas Einzelnes, womit man rechnen kann oder eben zeichnen. Jeder Einzelne dieser vier Pfeile ist ein Vektor.
I: Diese Pfeile sind gleich lang, parallel und gleich orientiert. Handelt es sich immer um ein und denselben Vektor?
A: Nein! Wenn es ein und derselbe Vektor wäre, dann würde ja nur ein Vektor [gemeint: Pfeil] da sein.

Interview mit Richard:



I: Jemand sagt: „Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile.“ Was sagst du dazu?
R: Diese vier Vektoren kann man aneinander reihen und kommt dann auf einen Vektor, einen Gesamtvektor.
I: Bitte zeichne das auf!
R (fertigt nebenstehende Zeichnung an).

Die Identifikation eines Vektors mit einem Einzelpfeil zieht nun einige Folgeprobleme nach sich. Wenn wir in einem Parallelogramm ABCD die Gleichung $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ anschreiben, ergibt sich das Problem, wieso zwei offenkundig verschiedene Pfeile einander gleich sind. Dazu ein Ausschnitt aus dem Interview mit der oben erwähnten Alexandra:



A: Ich würde Vektor $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$ so lange verschieben, bis ich zum Punkt B komme, und dann habe ich den Vektor $\overrightarrow{BC}$ ….. Das ist eigentlich genau derselbe Vektor wie $\vec{b}$, nur von einem anderen Punkt zu einem anderen Punkt.
I: Kann man behaupten: $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$?
A: Nein, weil $\overrightarrow{BC}$ geht von einem anderen Punkt als $\vec{b}$ aus.

Merken Sie den Widerspruch in diesem Interviewausschnitt? Einerseits sagt Alexandra, dass $\overrightarrow{BC}$ eigentlich genau derselbe Vektor wie $\vec{b}$ ist, andererseits sagt sie, dass man nicht $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ setzen kann. Dieser Widerspruch wurde für Alexandra vermutlich nie aufgeklärt; sie muss damit leben. Angesichts solcher begrifflicher Verwirrungen darf man sich aber auch über die folgende Antwort von Michaela nicht wundern:

I: Was stellst du dir unter einem Vektor vor?
M: Ich weiß nicht. Ich habe überhaupt keine Ahnung. Ein Vektor ist für mich nur ein Buchstabe mit oben einem Pfeil.

Fazit: Das Pfeilklassenmodell ist für die Schule nicht geeignet und war eine didaktische Fehlentwicklung.

Algebraische Vektoren mit geometrischer Deutung

Im Folgenden beschreibe ich ein didaktisches Konzept, in dem diese Probleme wesentlich besser gelöst sind. Die ersten Ideen dieses Konzepts gehen auf den Zeitschriftenartikel BÜRGER/FISCHER/MALLE/REICHEL(1980) zurück und wurden seitdem in Form verschiedener Lehrbücher konkretisiert und weiter entwickelt. Die ausgereifteste Form findet man im Lehrbuch MATHEMATIK VERSTEHEN (MALLE et al. 2004, 2005).

Im Gegensatz zum Pfeilklassenmodell sind **Vektoren** in diesem Konzept **algebraische Objekte**, nämlich **Zahlenpaare** (**Zahlentripel**). Ich skizziere die Grundideen im Folgenden nur anhand der Zahlenpaare, da für Zahlentripel wiederum alles analog verläuft. Wenn die Ebene mit einem fixen Koordinatensystem versehen wird, lassen sich die Vektoren (d.h. die Zahlenpaare) auf zweifache Weise geometrisch deuten, nämlich als Punkte bzw. Pfeile mit beliebigem Anfangspunkt (siehe Abb. 7).

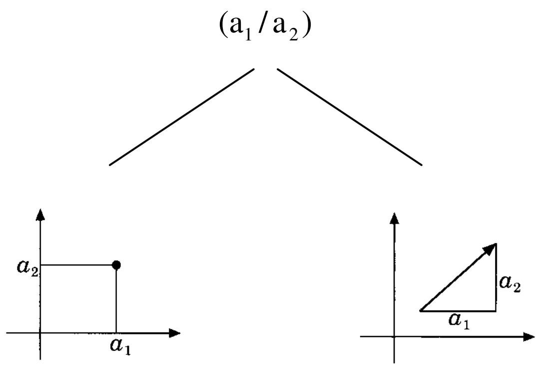


Abb. 7 Zwei geometrische Deutungen eines Vektors

Dabei gilt:
- Jedem Vektor (Zahlenpaar) entspricht genau ein Punkt der Ebene. Umgekehrt entspricht jedem Punkt der Ebene genau ein Vektor (Zahlenpaar).
- Jedem Vektor (Zahlenpaar) entsprechen unendlich viele Pfeile der Ebene (die aber, wenn man vom Nullvektor absieht, alle parallel, gleich lang und gleich gerichtet sind). Umgekehrt entspricht jedem Pfeil der Ebene genau ein Vektor (Zahlenpaar).

Es liegt also eine bijektive Zuordnung zwischen Vektoren und Punkten vor, nicht aber zwischen Vektoren und Pfeilen. (Durch die Einführung von Pfeilklassen könnte man diese bijektive Zuordnung erreichen, was wir jedoch nicht tun wollen.)

Ein wesentlicher Punkt des Konzepts ist nun der folgende: Die **Bezeichnung von Vektoren** richtet sich nach ihrer **geometrischen Deutung**. Werden Vektoren als Punkte gedeutet, bezeichnen wir sie mit A, B, C,…, werden sie als Pfeile gedeutet, mit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, … . Wird ein Vektor durch einen Pfeil vom Punkt A zum Punkt B gedeutet, so bezeichnen wir ihn mit $\overrightarrow{AB}$. Beim praktischen Arbeiten wählen wir stets die Bezeichnung, die der jeweiligen Situation angemessen ist.

Für die algebraischen Objekte (Zahlenpaare) werden **Rechenoperationen** (Addition, Vervielfachung) nun so definiert, wie es im ersten Teil dieses Artikels beschrieben wurde. Diese Rechenoperationen werden ebenfalls in der Ebene **geometrisch gedeutet**. Man beachte aber, dass für die geometrischen Objekte (Punkte, Pfeile) keine Rechenoperationen definiert werden.

Aus Abb. 8 lesen wir ab:
$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1 / b_2 - a_2) = (b_1 / b_2) - (a_1 / a_2) = B - A$
Dies gilt auch, wenn $b_1 \leq a_1$ oder $b_2 \leq a_2$ ist, was sofort einsichtig ist, wenn man schon vorher geklärt hat, dass einem Pfeil auf der Zahlengeraden von a nach b stets die reelle Zahl $b - a$ entspricht.

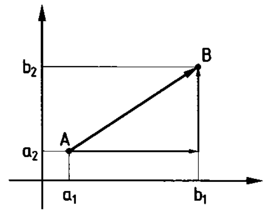
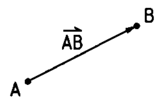


Abb. 8 Vektor von A nach B

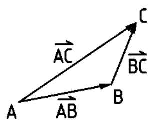
Aus der Formel $\overrightarrow{AB} = B - A$ ergibt sich $A + \overrightarrow{AB} = B$. Deutet man A als Punkt, $\overrightarrow{AB}$ als Pfeil und B wiederum als Punkt, erhält man eine geometrische Darstellung der Vektoraddition:

Punkt-Pfeil-Darstellung der Vektoraddition: Wird eine Vektor aus R^2 durch einen Punkt in der Ebene und ein zweiter Vektor aus R^2 durch einen an diesen Punkt angehängten Pfeil dargestellt, so entspricht die Summe der beiden Vektoren dem Endpunkt des angehängten Pfeils.



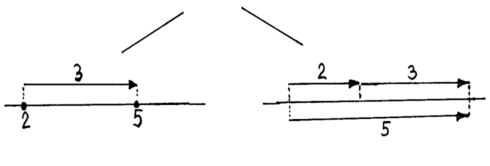
Mit Hilfe der Formel $\overrightarrow{AB} = B - A$ ergibt sich außerdem: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (B - A) + (C - B) =$
$= C - A = \overrightarrow{AC}$. Deutet man in der Formel $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ die Vektoren als Pfeile, erhält man eine weitere geometrische Darstellung der Vektoraddition:

Pfeildarstellung der Vektoraddition: Werden zwei Vektoren aus R^2 durch aneinander gehängte Pfeile in der Ebene dargestellt, so entspricht die Summe der beiden Vektoren dem Pfeil vom Anfangspunkt des ersten Pfeils zum Endpunkt des zweiten Pfeils.



Die Deutungen der Addition und Vervielfachung von Vektoren sind zweidimensionale Verallgemeinerungen entsprechender Deutungen im Eindimensionalen. Für die Addition reeller Zahlen gibt es zwei grundlegende Darstellungen auf der Zahlengeraden (Abb. 9a). Analoge Darstellungen erhält man im Zweidimensionalen (Abb. 9b).

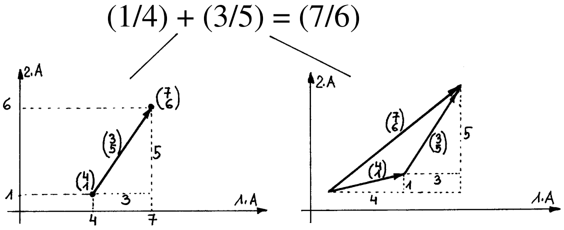
$2 + 3 = 5$



Punkt-Pfeil-Darstellung Pfeildarstellung

Abb. 9a Darstellungen der Addition im Eindimensionalen

$(1/4) + (3/5) = (7/6)$



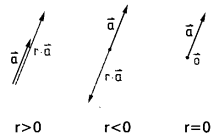
Punkt-Pfeil-Darstellung Pfeildarstellung

Abb. 9b Darstellungen der Addition im Zweidimensionalen

Vorübungen zur zweifachen Darstellung der Vektoraddition können schon in der Unterstufe mit Hilfe eines Computers durchgeführt werden (siehe dazu ULOVEC 2005).

Auch für die Vervielfachung von Vektoren lässt sich eine geometrische Deutung finden (einen genaueren Beweis dafür findet man in MATHEMATIK VERSTEHEN 5, S. 184):

Streckungsdarstellung der Vervielfachung: Der Multiplikation eines (vom Nullvektor $\vec{o}$ verschiedenen) Vektors $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl r entspricht eine Streckung jedes zugehörigen Pfeils mit dem Faktor r.



Die Schreibweisen, die sich aus diesem Konzept ergeben, erlauben es, die „Macht des Kalküls“ elegant ausnutzen. Man führt dabei Umformungen gemäß den Rechengesetzen aus, ohne alle Schritte geometrisch deuten zu müssen. Dies sei an einer einfachen Aufgabe illustriert.

Die Strecke AB wird durch den Punkt T im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Drücke T durch A und B aus.

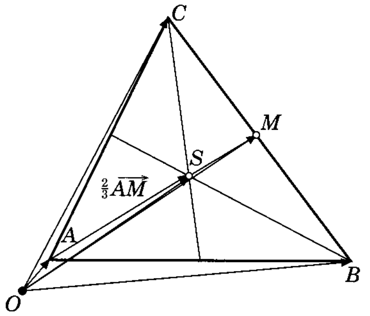
1. Lösungsmöglichkeit: $T = A + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad T = A + \frac{1}{3} \cdot (B - A) \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{1}{3} \cdot (2A + B)$

2. Lösungsmöglichkeit: $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad T - A = \frac{1}{3} \cdot (B - A) \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{1}{3} \cdot (2A + B)$

Die hier verwendeten Schreibweisen mögen für manche ungewohnt erscheinen, weil man sich vom Altgewohnten schwer lösen kann. Die Kritik richtet sich vor allem gegen die Schreibweise $A + \overrightarrow{AB} = B$. Es wird eingewandt, dass man Punkte und Pfeile nicht addieren könne und man daher schreiben müsse: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ (Äpfel-Birnen-Argument). Wer so argumentiert, hat das Konzept nicht verstanden. Denn wie oben erklärt wurde, sind A, B und $\overrightarrow{AB}$ lauter Zahlenpaare und eine Gleichung zwischen Zahlenpaaren ist völlig in Ordnung. Nur werden diese Zahlenpaare unterschiedlich geometrisch gedeutet: das Zahlenpaar A als Punkt, das Zahlenpaar $\overrightarrow{AB}$ als Pfeil und das Zahlenpaar B wieder als Punkt. Man darf daraus keinesfalls schließen, dass Punkte und Pfeile addiert werden. Eine Addition für Punkte und Pfeile wurde ja gar nicht definiert. Unsere empirischen Untersuchungen zeigen übrigens, dass Schülerinnen und Schüler diese Probleme nicht haben. Es scheint vielmehr ein Problem jener Lehrerinnen und Lehrer zu sein, die die Vektorrechnung anhand älterer Lehrbücher auf andere Weise erlernt haben.

Ortsvektoren

Welche Rolle spielen nun die so genannten **Ortsvektoren**? Zunächst sei festgestellt, dass man diese besser als „Ortspfeile“ benennen sollte, denn es handelt sich um Einzelpfeile, die an den Ursprung als Anfangspunkt gebunden sind. Aber braucht man diese überhaupt? Ich behaupte: Ortspfeile sind in der Analytischen Geometrie der Schule schlicht und einfach überflüssig. Ja mehr noch: sie sind schädlich. Dies sei an einem Beispiel illustriert, nämlich an der Herleitung der Formel für den Schwerpunkt eines Dreiecks. In dem Kasten auf der folgenden Seite findet man links eine Herleitung mit Ortspfeilen, rechts eine Herleitung nach dem hier propagierten Konzept. (Bei der Herleitung wird vorausgesetzt, dass der Schwerpunkt jede Schwerlinie im Verhältnis 1 : 2 teilt.)



$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} =$$

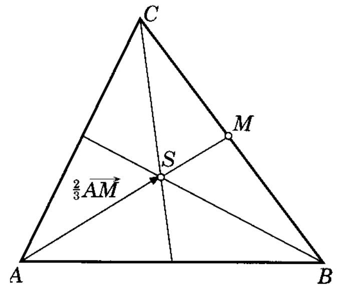
$$= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})) =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) =$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$



$$S = A + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} =$$

$$= A + \frac{2}{3}(M - A) =$$

$$= \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}M =$$

$$= \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(B+C)) =$$

$$= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}(B+C)$$

$$= \frac{1}{3}(A+B+C)$$

Man kann Folgendes erkennen:

- Die linke Skizze ist wegen der vielen eingezeichneten Pfeile äußerst unübersichtlich. Wenn die Schülerinnen und Schüler die Lage des Dreiecks ungünstig wählen, gibt es auf jeden Fall Probleme. Die rechte Skizze hingegen ist übersichtlich.
- Die linke Rechnung ist wegen der Pfeilschreibweisen komplizierter als die rechte.
- Die linke Rechnung liefert gar nicht das, was man eigentlich haben möchte, nämlich S. Man erhält nur den Ortspfeil $\overrightarrow{OS}$, dessen Koordinaten man dann erst extra in die Koordinaten von S umschreiben muss (warum eigentlich?). Die rechte Rechnung hingegen liefert direkt das gewünschte S.
- Die linke Rechnung entspricht einem gekünstelten, unnatürlichen Denken. Niemand denkt bei der Lösung dieses Problems an die Ortspfeile (es sei denn, er ist durch den Unterricht schon verbildet worden), sondern man denkt in Punkten und Pfeilen, was die rechte Rechnung perfekt wiedergibt. Die linke Rechnung stellt also für Schülerinnen und Schüler keine Hilfe dar, sondern eine heuristische Erschwernis. Sie müssen der Lehrperson zuliebe die Sache anders hinschreiben als sie denken. (Wenn man von Salzburg nach Linz fährt, fährt man auch nicht zuerst vom Ursprung Wien nach Salzburg, dann von Salzburg nach Linz und dann wieder von Ursprung Wien nach Linz, sondern mit Verlaub gesagt: Man fährt schlicht von Salzburg nach Linz.)

Ortsvektoren führen zu Problemen bei der Darstellung von Punktmengen im $\mathbb{R}^2$. Man kann eine Gerade zwar so anschreiben: $g = \{X \in \mathbb{R}^2 | X = P + t \cdot \vec{g}\}$; aber man kann nicht schreiben: $g = \{\overline{OX} \in \mathbb{R}^2 | \overline{OX} = \overline{OP} + t \cdot \vec{g}\}$. Man könnte zwar schreiben: $g = \{X \in \mathbb{R}^2 | \overline{OX} = \overline{OP} + t \cdot \vec{g}\}$. Aber auch das ist problematisch. Denn dabei ist $\overrightarrow{OP}$ ohne Zweifel ein Ortsvektor (er ist an den Ursprung gebunden, denn sonst wäre die Gerade nicht eindeutig festgelegt). Aber was ist $\vec{g}$? Grundsätzlich könnte man auch $\vec{g}$ als Ortsvektor auffassen, doch ist es aus heuristischen Gründen nicht zweckmäßig, den Richtungsvektor an den Ursprung anzuhängen (man stellt sich ja vor, dass man sich vom Punkt P aus in eine bestimmte Richtung bewegt). Der Vektor $\vec{g}$ wird deshalb in den meisten Schulbüchern als „freier Vektor" aufgefasst (d.h. als ein nicht an den Ursprung gebundener Vektor). Eine Addition eines Ortspfeiles mit einem freien Vektor wird aber in keinem Schulbuch definiert. Was haben sich die Schulbuchautoren dabei wohl gedacht?

Um den schädlichen Einfluss von „Ortsvektoren" zu illustrieren, sei noch ein Ausschnitt aus der vorhin erwähnten empirischen Untersuchung wiedergegeben. Christian (15 Jahre) sollte folgende Aufgabe lösen:

Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ *mit* $A = (8/7)$ *und* $B = (13/12)$.

Christian zeichnet die Punkte A und B einigermaßen richtig ein (Abb. 10). Statt aber dann die nahe liegende Lösung zu wählen und einen Pfeil von A nach B zu zeichnen, berechnet er den Vektor $\overrightarrow{AB} = (5/5)$ und zeichnet ihn als „Ortsvektor" vom Ursprung aus ein. Hier schlägt also die im Unterricht gepflegte Unsitte, ständig „Ortsvektoren" zu zeichnen, in einem unpassenden Moment durch.

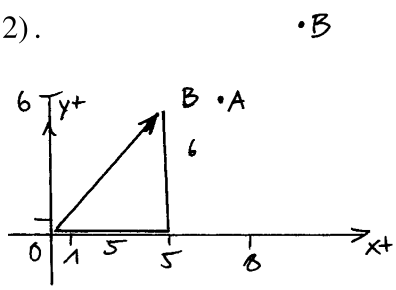


Abb. 10 So zeichnet Christian den Vektor von A nach B

Zum Verhältnis von Algebra und Geometrie

Nach dem hier propagierten Konzept sind Vektoren algebraische Objekte, nämlich Zahlenpaare bzw. Zahlentripel. Manchmal wird eingewandt, dass durch die dauernde Verwendung von Zahlenpaaren und ihrer Rechenoperationen in der Geometrie der ursprüngliche algebraische Vektorbegriff eine **schleichende Geometrisierung** erfährt, d.h. nach und nach zu einem geometrischen Objekt wird. Dies ist in der Tat der Fall. Die Lernenden identifizieren sehr bald einen Vektor mit dem zugeordneten Punkt bzw. Pfeil. Sie reden dann etwa vom Punkt P statt vom Punkt, der dem Vektor P zugeordnet ist; oder vom Vektor von A nach B statt vom Vektor, der dem Pfeil von A nach B zugeordnet ist. Diese Identifizierungen treten ganz von selbst ein und sind auch völlig in Ordnung. Sie sind sogar erwünscht, denn sie erleichtern das Sprechen ungemein und sind von großem heuristischen Wert. Die schleichende Geometrisierung des Vektorbegriffs ist also kein Nachteil, sondern in Wirklichkeit ein Vorteil. Dabei kann es in der Hitze des Gefechts schon einmal vorkommen, dass ein Schüler den Ausdruck $A + \overrightarrow{AB}$ so liest: Zum Punkt A wird der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ addiert. Das ist zwar in diesem Konzept streng genommen nicht erlaubt, aber nicht tragisch und hat keine negativen Auswirkungen. Was jedoch wichtig ist und in diesem Zusammenhang bei den Lernenden unbedingt erreicht werden sollte, ist die Fähigkeit, eine Sachlage aufzuklären, wenn eine Verständnisschwierigkeit auftaucht. Wenn man zum Beispiel gefragt wird, warum in einem Parallelogramm ABCD die Gleichung $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ gilt, obwohl die Pfeile unterschiedlich sind, sollte man nicht kapitulieren, sondern erklären können, dass es sich um zwei einander gleiche Zahlenpaare handelt, die durch unterschiedliche Pfeile geometrisch dargestellt werden.

In der klassischen Linearen Algebra der Hochschule wird das Verhältnis zwischen Algebra und Geometrie anders gesehen: In der Algebra gibt es den Vektorraum $\mathbb{R}^2$, also den Vektorraum der Zahlenpaare. In der Geometrie gibt es Vektorräume für geometrische Objekte, z.B. den Vektorraum der Pfeilklassen der Ebene. Die Beziehung zwischen diesen beiden Vektorräumen ist eine Isomorphie im Sinne der Linearen Algebra. Im hier propagierten Konzept der algebraischen Vektoren mit geometrischer Deutung wird jedoch nicht so vorgegangen. Es wird zwar ebenfalls der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ betrachtet (wenngleich ohne Nennung des Wortes „Vektorraum“, das im Lehrplan nicht vorgesehen ist), es werden jedoch keine Rechenoperationen für irgendwelche geometrischen Objekte eingeführt, weder für Punkte noch für Pfeile noch für irgendetwas anderes. Deshalb erhält die Ebene bei diesem Aufbau auch keine Vektorraumstruktur. Die Beziehung zwischen $\mathbb{R}^2$ und Ebene kann daher nicht als Isomorphie im Sinne der Linearen Algebra aufgefasst werden, sondern nur im Sinne einer **anschaulichen geometrischen Deutung** algebraischer Sachverhalte bzw. umgekehrt als eine **anschauliche Koordinatisierung** geometrischer Sachverhalte. Das ist weniger als das, was an der Hochschule gelehrt wird, reicht aber für die Analytische Geometrie der Schule völlig aus.

Die Einschränkung des schulischen Vektorbegriffs auf die Vektoren in $\mathbb{R}^n$ anstelle eines allgemeinen Vektorbegriffes (Vektor als Element eines Vektorraums) reicht für die Schule ebenfalls völlig aus und stellt keine ernsthafte Einschränkung dar. Ein Satz der Linearen Algebra besagt ja, dass jeder n-dimensionale Vektorraum isomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Nach Einführung einer Basis kann man jeden Vektor aus einem n-dimensionalen Vektorraum durch den dazugehörigen Koordinatenvektor, also einen Vektor in $\mathbb{R}^n$ angeben. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist also der typische Vertreter eines n-dimensionalen Vektorraumes. Die Verallgemeinerung von $\mathbb{R}^n$ zum allgemeinen Vektorraum bereitet später an der Hochschule keine Probleme. Insofern ist das hier vorgeschlagene Vektorkonzept auch „aufwärts- kompatibel“ und eine gute Vorbereitung für die Hochschule.

Literatur

BÜRGER, H./FISCHER, R./MALLE, G./REICHEL, H.-C. (1980): Einführung des Vektorbegriffes: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung. Journal für Mathematik-Didaktik, Bd. 1, Heft 3, S. 171-187.

KÖHLER, J./HÖWELMANN, R./KRÄMER, H. (1968): Analytische Geometrie in vektorieller Darstellung. Salle/Diesterweg, Frankfurt.

MALLE, G. (1998): Was ist ein Vektor? – Antworten aus der Geschichte der Mathematik. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen, Heft 29, S. 112-123. Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wien.

MALLE, G.(2005a): Von Koordinaten zu Vektoren. Mathematik lehren, Heft 133, S. 4 – 7.

MALLE, G.(2005b): Neue Wege in der Vektorgeometrie. Mathematik lehren, Heft 133, S. 8 – 14.

MALLE, G.(2005c): Schwierigkeiten mit Vektoren. Mathematik lehren, Heft 133, S. 8 – 14.

MALLE, G./RAMHARTER, E./ULOVEC, A./KANDL, S. (2004,2005): Mathematik verstehen 5 und 6. Schulbuch für die AHS-Oberstufe. öbvhpt, Wien.

ULOVEC, A. (2005): Heiß oder kalt? Mathematik lehren, Heft 133, S. 20 – 21.

Anschrift des Verfassers: Univ.-Prof. Dr. Günther Malle
Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Nordbergstrasse 15, A 1090 Wien
guenther.malle@univie.ac.at